数字信号处理

-傅立叶级数：定义及其应用

September 21, 2020

本节概要

傅立叶级数在信号处理中的应用

如果我们将信号看作是关于时间的函数，则我们往往把这个函数展开为三角函数和的形式，这个和式可以描述各个频率的分量。例如信号

$$f(t) = 2\sin(t) - 50\sin(3t) + 10\sin(200t), \tag{1}$$

所包含的频率分量分别为每个 2π 周期分别振动 1 次、3 次和 200 次，而根据这三个频率分量前面系数的大小，震动频率为 3 的分量比其它两个分量占优（这里我们注意到 $\sin(kt)$ 这个频率的分量的周期为 $\frac{2\pi}{k}$，频率为 k，即在时间区间 $0 \leq t \leq 2\pi$ 内振动 k 次）。

傅立叶级数在信号处理中的应用

信号分析中常见的工作之一是消除高频噪声，其中一种方式是首先将信号函数 $f(t)$ 表示为三角函数和的形式

$$f(t) = a_0 + \sum_k \big(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\big), \tag{2}$$

然后令其中高频分量的系数(即其中 k 值大的那些 a_k 和 b_k) 等于零。

信号分析中常见的工作之二是数据压缩，目标是以传输最少数据的方式发送信号。其中一种方法是首先将信号 $f(t)$ 用三角函数展开，然后只发送系数绝对值比给定阈值大的那些系数 a_k 和 b_k，舍去较小的系数和对 f 没有实质性贡献的系数。

在 $[-\pi, \pi]$ 上傅立叶级数的计算

我们首先考虑将定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的周期函数 $f(t)$ 展开成傅立叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\big). \tag{3}$$

我们首先有以下定理（证明留作习题）。

在 $[-\pi, \pi]$ 上正余弦函数的正交性

Theorem 1 (正余弦函数的正交性)

下列积分关系式成立:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & n = k \geq 1, \\ 2, & n = k = 0 \\ 0, & \textit{otherwise}, \end{cases} \tag{4}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & n = k \geq 1, \\ 0, & \textit{otherwise}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = 0, \forall n, k \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

这些关系可以等价的描述为集合 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}$ 是 $L^2([-\pi, \pi])$ 上的正交函数系。

函数在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅立叶级数展开

根据正余弦函数的正交性，我们有以下定理

Theorem 2 (函数的傅立叶展开)

设 $f(t)$ *是* $[-\pi, \pi]$ *上的周期函数，若* $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right)$ *成立，那么系数满足：*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

定理??的证明

Proof.

□

任意长度为 2π 的对称区间

对于任意长度为 2π 的区间，定理??仍适用，可以用以下引理来证明这个结论。

Lemma 3

设 F 为任意的周期为 2π 的函数，c 为任意实数，则有:

$$\int_{-\pi+c}^{\pi+c} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

把这个引理应用于 $F(x) = f(x)\cos(kx)$ 或 $F(x) = f(x)\sin(kx)$，可以知道定理??中的系数公式对于形如 $[-\pi + c, \pi + c]$ 的任意区间均适用。

引理??的证明

Proof.

□

形如 $[-a,a]$ 的区间

对于形如 $[-a,a]$ 的区间，傅立叶级数的基函数为 $\cos(\frac{k\pi x}{a})$ 和 $\sin(\frac{k\pi x}{a})$，周期为 $2a$（证明留作习题）。我们有以下定理

Theorem 4 (长度为 $2a$ 的对称区间上的傅立叶级数展开)

如果在区间 $[-a,a]$ 内有 $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(\frac{k\pi t}{a}) + b_k\sin(\frac{k\pi t}{a})\right)$ 成立，那么其傅立叶系数满足：

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{11}$$

$$a_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos(\frac{k\pi x}{a})\,\mathrm{d}x, \tag{12}$$

$$b_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin(\frac{k\pi x}{a})\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

傅立叶级数展开举例

Example 5

令

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{14}$$

计算 f 在区间 $[-2, 2]$ 上的傅立叶级数。

奇函数与偶函数

Definition 6

令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个函数，若 $f(-t)=f(t)$，则 f 为偶函数；若 $f(-t)=-f(t)$ 则 f 为奇函数。

例如 t^2 是偶函数，而 $\sin(t)$ 是奇函数。
由函数的奇偶性的定义，我们可以得到如下关系：

$$\begin{aligned}\text{偶函数}\times\text{偶函数}&=\text{偶函数}\\ \text{偶函数}\times\text{奇函数}&=\text{奇函数}\\ \text{奇函数}\times\text{奇函数}&=\text{偶函数}.\end{aligned}\tag{15}$$

奇函数与偶函数的性质

我们有以下引理。

Lemma 7

如果 F 为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} F(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

如果 F 为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} F(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{17}$$

奇函数与偶函数的傅立叶展开

假设 $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(\frac{k\pi t}{a}) + b_k \sin(\frac{k\pi t}{a})\right)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上成立，那么对于函数的傅立叶展开，我们有以下定理。

Theorem 8 (奇偶函数的傅立叶展开)

如果 $f(t)$ 为偶函数，则该函数在区间 $[-a, a]$ 上的傅立叶展开只有余弦项，即 $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{k\pi t}{a})$，其中

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, a_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos(\frac{k\pi x}{a})\,\mathrm{d}x. \tag{18}$$

如果 $f(t)$ 为奇函数，则该函数在区间 $[-a, a]$ 上的傅立叶展开只有正弦项，即 $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi t}{a})$，其中

$$b_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin(\frac{k\pi x}{a})\,\mathrm{d}x. \tag{19}$$

半区上的傅立叶展开

设 f 为定义在区间 $[0,a]$ 上的函数，如果将 f 进行偶延拓，则令

$$f_e(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \le t \le a, \\ f(-t), & -a \le t < 0, \end{cases} \tag{20}$$

就得到了 $f(t)$ 的偶延拓 f_e，这时 f_e 的傅立叶展开式只含有余弦项，即

$$f_e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{k\pi t}{a}), \ -a \le t \le a, \tag{21}$$

其中 a_k 由定理**??**中的系数公式给出。而由于在 $[0,a]$ 上，$f_e(t) = f(t)$，所以 a_k 的计算只需用到 $f(t)$，并且我们还有

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{k\pi t}{a}), \ 0 \le t \le a. \tag{22}$$

注意这里我们实际上假设了 f_e 和 f 的傅立叶展开收敛到函数本身。

半区上的傅立叶展开

如果将 f 进行奇延拓，则令

$$f_o(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \le t \le a, \\ -f(-t), & -a \le t < 0, \end{cases} \tag{23}$$

就得到了 $f(t)$ 的奇延拓 f_o，这时 f_o 的傅立叶展开式只含有正弦项，即

$$f_o(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi t}{a}, \ -a \le t \le a, \tag{24}$$

其中 b_k 由定理**??**给出。与余弦展开类似，由于在 $[0, a]$ 上，
$f_o(t) = f(t)$，所以 b_k 的计算只需用到 $f(t)$，并且我们还有

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi t}{a}, \ 0 \le t \le a. \tag{25}$$

注意这里我们实际上也假设了 f_o 和 f 的傅立叶展开收敛到函数本身。

傅立叶展开举例

我们将在下一讲中讨论傅立叶展开的收敛性。为了避免讨论傅立叶级数的收敛性问题，我们不加证明的给出以下性质。

Proposition 9

如果 f 是周期为 2π 的函数，则

1. *如果 f 在 t 点处连续，则它的傅立叶级数 $F(t)$ 收敛，且 $F(t) = f(t)$。*
2. *如果 f 在 t 点处不连续，则 $F(t)$ 收敛于 f 在 t 点处的左右极限的平均值，即*

$$F(t) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to t^-} f(x) + \lim_{x\to t^+} f(x)\Big). \tag{26}$$

傅立叶展开举例

Example 10

求函数 $f(t) = t, t \in [-\pi, \pi]$ 的傅立叶级数展开。

傅立叶展开举例

Example 11

求函数

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ \pi - t, & \frac{\pi}{2} \le t \le \pi, \end{cases} \tag{27}$$

的傅立叶级数展开。

傅立叶展开举例

Example 12

求函数 $f(t)=\sin(3t)+\cos(4t)$ 的傅立叶级数展开。

Example 13

求函数 $f(t)=\sin^2(t)$ 的傅立叶级数展开。

傅立叶展开举例

Example 14

求函数 $f(t) = t^2 + 1$ 在 $[0, 1]$ 上的正弦傅立叶级数展开。

复指数

由于复指数 $e^{inx}, n \in \mathbb{Z}$ 具有简单的计算性质，在一些运算中，将傅立叶展开表示为复指数的形式会更方面一些。

Definition 15

对于任意实数 t，复指数为

$$e^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t), \tag{28}$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

复指数相关引理

复指数满足以下引理（证明留作习题）。

Lemma 16

对所有 $t, s \in \mathbb{R}$，*我们有*

1. $e^{\mathrm{i}(t+2\pi)} = e^{\mathrm{i}t}$.
2. $\left|e^{\mathrm{i}t}\right| = 1$.
3. $\overline{e^{\mathrm{i}t}} = e^{-\mathrm{i}t}$.
4. $e^{\mathrm{i}t}e^{\mathrm{i}s} = e^{\mathrm{i}(t+s)}$.
5. $\frac{e^{\mathrm{i}t}}{e^{\mathrm{i}s}} = e^{\mathrm{i}(t-s)}$.
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{e^{\mathrm{i}t}\} = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}$.

复指数的正交性

Theorem 17

函数集

$$\left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\right\} \tag{29}$$

在 $L^2([-\pi, \pi])$ 上是标准正交的。

Proof.

$\square$

傅立叶展开的复数形式

Theorem 18

如果在区间 $[-\pi, \pi]$ 上 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{int}$，则系数满足：

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x. \tag{30}$$

Example 19

给出函数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi, \\ -1, & -\pi \leq t < 0, \end{cases} \tag{31}$$

的复指数傅立叶展开。

在其它区间上复指数的正交性

Theorem 20

函数集

$$\{\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{\frac{in\pi t}{a}}, n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \tag{32}$$

在 $L^2([-a,a])$ 上是标准正交的。如果在区间 $[-a,a]$ 上 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{\frac{in\pi t}{a}}$，则系数满足：

$$\alpha_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)e^{-\frac{in\pi t}{a}}\,\mathrm{d}x. \tag{33}$$

傅立叶级数的实数形式和复数形式之间的关系

如果 f 是实值函数，那么其傅立叶级数的实数形式可以由复数形式推导得来，反之亦然。我们这里给出 $[-\pi, \pi]$ 上两种形式之间的相互推导的过程。