课程安排及教材

- 课程参考书：小波与傅立叶分析基础（第二版），[美] Albert Boggess、Francis J. Narcowich 著，芮国胜、康健译，电子工业出版社，2010
- 上课时间：2-13 周
- 教学内容：傅立叶与离散傅立叶分析，小波分析选讲。
- 考核方式：平时成绩 *40%+ 期末成绩 *60%
  平时成绩: 四次作业 + 两次小测 + 随机考勤
- 考试日期：11 月 25 日，第 13 周周三（暂定）。

内积

Definition 1 (内积)

一个在复向量空间 V 上的内积是一个映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ 并满足以下性质：

1. 正定性：$\langle v,v\rangle>0,\forall v\in V,v\neq 0$。
2. 共轭对称性：$\overline{\langle v,w\rangle}=\langle w,v\rangle,\forall v,w\in V$。
3. 齐次性：$\langle cv,w\rangle=c\langle v,w\rangle,\forall v,w\in V,c\in\mathbb{C}$。
4. 线性性：$\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle,\forall u,v,w\in V$。

Remark

1. 如果去掉共轭运算且令 $c\in\mathbb{R}$，上述定义同样适用于实内积空间。
2. 由内积定义的（2）和（4）可得到对第二项的线性性：$\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle,\forall u,v,w\in V$。
3. 由内积定义的（2）和（3）可得：$\langle v,cw\rangle=\bar{c}\langle v,w\rangle,\forall v,w\in V,c\in\mathbb{C}$。

内积

Definition 1 (内积)

一个在复向量空间 V 上的内积是一个映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ 并满足以下性质：

1. 正定性：$\langle v,v\rangle > 0, \forall v \in V, v \neq 0$。
2. 共轭对称性：$\overline{\langle v,w\rangle} = \langle w,v\rangle, \forall v,w \in V$。
3. 齐次性：$\langle cv,w\rangle = c\langle v,w\rangle, \forall v,w \in V, c \in \mathbb{C}$。
4. 线性性：$\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle, \forall u,v,w \in V$。

Remark

1. 如果去掉共轭运算且令 $c \in \mathbb{R}$，上述定义同样适用于实内积空间。
2. 由内积定义的（2）和（4）可得到对第二项的线性性：$\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle, \forall u,v,w \in V$。
3. 由内积定义的（2）和（3）可得：$\langle v,cw\rangle = \bar{c}\langle v,w\rangle, \forall v,w \in V, c \in \mathbb{C}$。

内积

Definition 1 (内积)

一个在复向量空间 V 上的内积是一个映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ 并满足以下性质：

1. 正定性：$\langle v, v\rangle > 0, \forall v \in V, v \neq 0$。
2. 共轭对称性：$\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle, \forall v, w \in V$。
3. 齐次性：$\langle cv, w\rangle = c\langle v, w\rangle, \forall v, w \in V, c \in \mathbb{C}$。
4. 线性性：$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \forall u, v, w \in V$。

Remark

1. 如果去掉共轭运算且令 $c \in \mathbb{R}$，上述定义同样适用于实内积空间。
2. 由内积定义的（2）和（4）可得到对第二项的线性性：$\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle, \forall u, v, w \in V$。
3. 由内积定义的（2）和（3）可得：$\langle v, cw\rangle = \bar{c}\langle v, w\rangle, \forall v, w \in V, c \in \mathbb{C}$。

内积

Definition 1 (内积)

一个在复向量空间 V 上的内积是一个映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ 并满足以下性质：

1. 正定性：$\langle v,v\rangle > 0, \forall v\in V, v\neq 0$。
2. 共轭对称性：$\overline{\langle v,w\rangle} = \langle w,v\rangle, \forall v,w\in V$。
3. 齐次性：$\langle cv,w\rangle = c\langle v,w\rangle, \forall v,w\in V, c\in\mathbb{C}$。
4. 线性性：$\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle, \forall u,v,w\in V$。

Remark

1. 如果去掉共轭运算且令 $c\in\mathbb{R}$，上述定义同样适用于实内积空间。
2. 由内积定义的（2）和（4）可得到对第二项的线性性：$\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle, \forall u,v,w\in V$。
3. 由内积定义的（2）和（3）可得：$\langle v,cw\rangle = \bar{c}\langle v,w\rangle, \forall v,w\in V, c\in\mathbb{C}$。

内积

Definition 1 (内积)

一个在复向量空间 V 上的内积是一个映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ 并满足以下性质：

1. 正定性：$\langle v,v\rangle > 0, \forall v\in V, v\neq 0$。
2. 共轭对称性：$\overline{\langle v,w\rangle} = \langle w,v\rangle, \forall v,w\in V$。
3. 齐次性：$\langle cv,w\rangle = c\langle v,w\rangle, \forall v,w\in V, c\in\mathbb{C}$。
4. 线性性：$\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle, \forall u,v,w\in V$。

Remark

1. 如果去掉共轭运算且令 $c\in\mathbb{R}$，上述定义同样适用于实内积空间。
2. 由内积定义的（2）和（4）可得到对第二项的线性性：$\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle, \forall u,v,w\in V$。
3. 由内积定义的（2）和（3）可得：$\langle v,cw\rangle = \bar{c}\langle v,w\rangle, \forall v,w\in V, c\in\mathbb{C}$。

内积

Definition 1 (内积)

一个在复向量空间 V 上的内积是一个映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ 并满足以下性质：

1. 正定性：$\langle v,v\rangle > 0, \forall v\in V, v\neq 0$。
2. 共轭对称性：$\overline{\langle v,w\rangle} = \langle w,v\rangle, \forall v,w\in V$。
3. 齐次性：$\langle cv,w\rangle = c\langle v,w\rangle, \forall v,w\in V, c\in\mathbb{C}$。
4. 线性性：$\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle, \forall u,v,w\in V$。

Remark

1. 如果去掉共轭运算且令 $c\in\mathbb{R}$，上述定义同样适用于实内积空间。
2. 由内积定义的（2）和（4）可得到对第二项的线性性：$\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle, \forall u,v,w\in V$。
3. 由内积定义的（2）和（3）可得：$\langle v,cw\rangle = \bar{c}\langle v,w\rangle, \forall v,w\in V, c\in\mathbb{C}$。

内积

Definition 1 (内积)

一个在复向量空间 V 上的内积是一个映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ 并满足以下性质：

1. 正定性：$\langle v,v\rangle>0,\forall v\in V,v\neq 0$。
2. 共轭对称性：$\overline{\langle v,w\rangle}=\langle w,v\rangle,\forall v,w\in V$。
3. 齐次性：$\langle cv,w\rangle=c\langle v,w\rangle,\forall v,w\in V,c\in\mathbb{C}$。
4. 线性性：$\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle,\forall u,v,w\in V$。

Remark

1. 如果去掉共轭运算且令 $c\in\mathbb{R}$，上述定义同样适用于实内积空间。
2. 由内积定义的（2）和（4）可得到对第二项的线性性：
   $\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle,\forall u,v,w\in V$。
3. 由内积定义的（2）和（3）可得：
   $\langle v,cw\rangle=\bar{c}\langle v,w\rangle,\forall v,w\in V,c\in\mathbb{C}$。

内积

Definition 1 (内积)

一个在复向量空间 V 上的内积是一个映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ 并满足以下性质：

1. 正定性：$\langle v, v\rangle > 0, \forall v \in V, v \neq 0$。
2. 共轭对称性：$\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle, \forall v, w \in V$。
3. 齐次性：$\langle cv, w\rangle = c\langle v, w\rangle, \forall v, w \in V, c \in \mathbb{C}$。
4. 线性性：$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \forall u, v, w \in V$。

Remark

1. 如果去掉共轭运算且令 $c \in \mathbb{R}$，上述定义同样适用于实内积空间。
2. 由内积定义的（2）和（4）可得到对第二项的线性性：
   $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle, \forall u, v, w \in V$。
3. 由内积定义的（2）和（3）可得：
   $\langle v, cw\rangle = \bar{c}\langle v, w\rangle, \forall v, w \in V, c \in \mathbb{C}$。

内积空间

Definition 2 (内积空间)

定义了内积的向量空间被称为内积空间。一般为了强调基本空间 V，我们把 V 上的内积表示为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$。

由内积的正定性，我们可以定义 $\|v\|_V = \sqrt{\langle v, v\rangle_V} \geq 0$ 为向量 v 的范数，进而我们可以将 V 空间中两向量 v, w 之间的距离定义为

$$\mathrm{dist}(v, w)_V := \|v - w\|_V. \tag{1}$$

Definition 3 (收敛与相等)

在赋范空间 V 中，序列 $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到 v 是指

$$\|v_k - v\|_V \to 0, k \to \infty. \tag{2}$$

而 $v = w$ 是指

$$\|v - w\|_V = 0. \tag{3}$$

L^2 空间

Definition 4 (L^2 空间)

对于 $a \le t \le b$，$L^2([a,b])$ 空间表示所有定义在 $[a,b]$ 上平方可积的函数组成的空间，即

$$L^2([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C}, \int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty \right\}. \tag{4}$$

- 这里的积分实际上是 Lebesgue 积分，但是由于本课程只涉及到 $f(t)$ 是连续函数或者 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有有限个间断点，因此，这里的积分可以看作是 Riemann 积分。
- 在数字信号处理中，条件 $\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$ 可以从物理意义上解释为信号的总能量是有限的。
- L^2 空间一般是无穷维的。例如函数序列 $\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$ 存在于 $L^2([0,1])$ 空间中且彼此线性无关。

L^2 空间

Definition 4 (L^2 空间)

对于 $a \le t \le b$，$L^2([a,b])$ 空间表示所有定义在 $[a,b]$ 上平方可积的函数组成的空间，即

$$L^2([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C}, \int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty \right\}. \tag{4}$$

- 这里的积分实际上是 Lebesgue 积分，但是由于本课程只涉及到 $f(t)$ 是连续函数或者 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有有限个间断点，因此，这里的积分可以看作是 Riemann 积分。
- 在数字信号处理中，条件 $\int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$ 可以从物理意义上解释为信号的总能量是有限的。
- L^2 空间一般是无穷维的。例如函数序列 $\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$ 存在于 $L^2([0,1])$ 空间中且彼此线性无关。

L^2 空间

Definition 4 (L^2 空间)

对于 $a \le t \le b$，$L^2([a,b])$ 空间表示所有定义在 $[a,b]$ 上平方可积的函数组成的空间，即

$$L^2([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C}, \int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty \right\}. \tag{4}$$

- 这里的积分实际上是 Lebesgue 积分，但是由于本课程只涉及到 $f(t)$ 是连续函数或者 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有有限个间断点，因此，这里的积分可以看作是 Riemann 积分。
- 在数字信号处理中，条件 $\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$ 可以从物理意义上解释为信号的总能量是有限的。
- L^2 空间一般是无穷维的。例如函数序列 $\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$ 存在于 $L^2([0,1])$ 空间中且彼此线性无关。

L^2 空间

Definition 4 (L^2 空间)

对于 $a \le t \le b$，$L^2([a,b])$ 空间表示所有定义在 $[a,b]$ 上平方可积的函数组成的空间，即

$$L^2([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C}, \int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty \right\}. \tag{4}$$

- 这里的积分实际上是 Lebesgue 积分，但是由于本课程只涉及到 $f(t)$ 是连续函数或者 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有有限个间断点，因此，这里的积分可以看作是 Riemann 积分。
- 在数字信号处理中，条件 $\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$ 可以从物理意义上解释为信号的总能量是有限的。
- L^2 空间一般是无穷维的。例如函数序列 $\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$ 存在于 $L^2([0,1])$ 空间中且彼此线性无关。

L^2 空间中的内积

Definition 5

$L^2([a,b])$ 上的 L^2 内积定义为

$$\langle f,g\rangle_{L^2}=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t,\forall f,g\in L^2([a,b]). \tag{5}$$

可以证明(5)定义了 $L^2([a,b])$ 上的一个内积。

l^2 空间

Definition 6

l^2 空间是由所有 $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, x_i \in \mathbb{C}$ 且满足 $\sum_{-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ 的无穷维向量构成的。该空间中内积的定义为

$$\langle x, y\rangle_{l^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_n}, \tag{6}$$

其中 $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$，$y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots)$。

证明(6)定义了 l^2 上的一个内积留作习题。

收敛

Definition 7 (L^2 收敛)

给定 $L^2([a,b])$ 上的序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，若有 $n\to\infty$ 时，$\|f-f_n\|_{L^2}\to 0$，则称序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 f。或者更严格的说，$\forall\epsilon$，$\exists N>0$，使得 $n>N$ 时，有 $\|f-f_n\|_{L^2}<\epsilon$，则称序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依 L^2 收敛于 f。

L^2 收敛又称为均匀收敛。在数学分析中还学过另外两种收敛:

Definition 8 (逐点收敛)

序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛到 f 是指，$\forall t\in[a,b]$, 对 $\forall\epsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|f_n(t)-f(t)|<\epsilon$。

Definition 9 (一致收敛)

序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 f 是指，$\forall\epsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$\forall t\in[a,b]$ 都有 $|f_n(t)-f(t)|<\epsilon$。

逐点收敛与一致收敛举例

Example 10

考虑序列 $f_n(t) = t^n, n = 1, 2, 3, \ldots$，则 $f_n(t)$ 在 $[0, 1)$ 上逐点收敛到 0，在 $[0, r], 0 < r < 1$ 上一致收敛于 0。

L^2 收敛与一致收敛的关系

Theorem 11

在有限区间 $[a,b]$ 上，若序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛到 f，则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也依 L^2 收敛到 f。但反之不一定成立。

Remark 1. 通常，逐点收敛序列不一定 L^2 收敛。但是若是该序列在 L^2 上一致有界，则逐点收敛足够保证 L^2 收敛。

定理11的证明

Proof.

$\square$

Schwarz 与三角不等式

内积空间最重要的性质是有 Schwarz 不等式和三角不等式，下面我们给出并证明这两个不等式。

Theorem 12 (Schwarz 不等式、三角不等式)

设 V 关于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是一个（实或复的）内积空间，则 $\forall x,y\in V$，都有:

- *Schwarz 不等式: $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|$，当且仅当 x 和 y 线性相关时等号成立。进一步的，当且仅当 x,y 是非负倍数关系时，有 $\langle x,y\rangle=\|x\|\|y\|$。*
- *三角不等式: $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$。当且仅当 x,y 是非负倍数关系时，等号成立。*

Schwarz 与三角不等式

内积空间最重要的性质是有 Schwarz 不等式和三角不等式，下面我们给出并证明这两个不等式。

Theorem 12 (Schwarz 不等式、三角不等式)

设 V 关于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是一个（实或复的）内积空间，则 $\forall x, y \in V$，都有:

- *Schwarz 不等式: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$，当且仅当 x 和 y 线性相关时等号成立。进一步的，当且仅当 x, y 是非负倍数关系时，有 $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$。*
- *三角不等式: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$。当且仅当 x, y 是非负倍数关系时，等号成立。*

定理12的证明

Proof.

$\square$